DETERMINANTES

El determinante es una operación que se define para matrices cuadradas y que nos informa de distintas cosas: dependencia lineal de vectores, solución de un sistema de ecuaciones, cálculo de superficies y volúmenes, …

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

El determinante es:

1. Una operación de las matrices cuadradas que proporciona gran información sobre la misma. Su valor es un número.
2. Las matrices 'no' cuadradas se pueden estudiar a partir de las matrices cuadradas. Luego también es aplicable para ellas.
3. Esta operación de las matrices cuadradas se ha visto (en el estudio de los problemas mencionados en la portada del tema) que se puede describir así:

El determinante es la suma de todos los productos posibles que se pueden hacer eligiendo un elemento de cada fila y columna -sin que se repita la fila y la columna en cada elección- afectado de un signo más o menos según sea par o impar el número de inversiones que presenta el orden de las columnas respecto de las filas en ese producto.

2. DETERMINANTE DE ORDEN 2

En el caso de una matriz de orden 2 queda así:

Llamamos determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplos

Dependencia lineal:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Resolución de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

Cálculo de superficies:

Paralelogramo definido por los vectores: (4,0) y (0,3) primero. Luego otro normal, dibujarlo. Por ejemplo, (2, 1) y (1, 3)

Sería: $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \ldots$

APLICACIONES DEL DETERMINANTE DE ORDEN 2.

Dependencia lineal

Tomemos dos vectores del plano (a_1, a_2) y (b_1, b_2)

¿Cómo saber si son l.d. o no?

Para que sean l.d. sus coordenadas tienen que ser proporcionales; es decir,

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

Es decir,

$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1=0$$

Si el resultado anterior fuese diferente de cero serían l.i.; es decir, tendrían direcciones distintas.

Pues bien, este valor es el determinante de la matriz que forman los dos vectores:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES

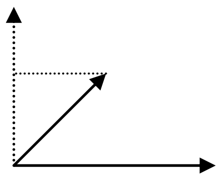
Otro ámbito que está ligado a su nacimiento es el de la resolución de un sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

Despejando la 'x' por el método de reducción y haciendo lo análogo para la "y", llegaríamos a estos valores que se pueden definir a través del determinante:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Superficie de un paralelogramo.

Sea el paralelogramo determinado por los vectores (a_1, a_2) y (b_1, b_2).



Podemos tomar como base el vector **b** y como altura la proyección de **a** sobre **b**.

Entonces la altura del paralelogramo quedaría:

$$S = |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}|} = (a_1, a_2) \cdot (b_2, -b_1) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. DETERMINANTE DE ORDEN 3

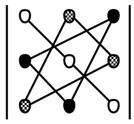
Llamamos determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y representamos por

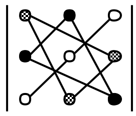
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

REGLA DE SARRUS

Es una regla que nos permite obtener fácilmente el valor del determinante a través de todos los productos que tenemos que calcular.


positivos


negativos

APLICACIONES

Dependencia lineal

Veamos cómo son los vectores: (1, 2, 1); (2, 0, 1) y (3, 1, –2)

Resolución de sistema de ecuaciones

Podemos resolver este sistema cuya solución es (1,1,1) y que a simple vista se ve:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

Cálculo de volúmenes

Podemos empezar con el del paralelepípedo de vectores: (3,0,0); (0,4,0) y (0,0,5) y luego pasar a otros más normales.

Otro normal: (1, 2, 1); (2, 3, -1); (-2, 1, 0)

4. DETERMINANTE DE ORDEN n

Llamamos determinante de una matriz A y representamos por $\det A = |A|$:

- La suma de todos los productos posibles que se pueden formar.
- Tomando un elemento de cada fila y columna sin que se repitan las filas y columnas.
- Afectado de un signo + ó – según que la paridad de la permutación que indican las filas y columnas sea igual o distinta clase.

$$|A| = \sum_{\sigma \in \wp(n)} (-1)^{sig(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Ejemplo

Hacer un pequeño muestreo de cómo se hallaría el de orden 4.

Ahora cobran sentido las propiedades como la búsqueda de rutinas que me simplifiquen el cálculo de los determinantes.

5. PROPIEDADES

Vamos a enunciarlas e ilustrarlas con algún ejemplo.

1. $|A| = |{}^tA|$.

   La elección de los elementos de una fila o columna me dará las mismas posibilidades en uno u otro y el signo se mantiene puesto que la permutación de filas en el otro caso será de columnas y viceversa y la diferencia en la paridad se mantendrá.
2. Un determinante con una línea (fila o columna) de ceros es cero. Para hallar el determinante como tenemos que coger un elemento de cada fila y columna obviamente siempre alguno de ellos será cero.

3. Si cambiamos dos líneas entre sí el determinante cambia de signo[1]
4. Un determinante con dos líneas iguales paralelas es nulo.

$$\textit{Por ejemplo,}\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Pues si invertimos estas dos filas o columnas nos saldría por un lado el mismo valor y por otro tendría que ser opuesto. Esto sólo le ocurre al 0.

5. Si multiplicamos una línea de un determinante; es decir, un vector fila o columna, por un escalar, el determinante queda multiplicado por dicho número: (se puede demostrar)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \textit{ Por ejemplo,}\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

También es evidente, pues en cada término del determinante aparecerá un factor multiplicado por dicho escalar pudiéndose sacar factor común.

6. Si en un determinante hay dos filas (o dos columnas) proporcionales, su determinante es cero.
   Podríamos sacar el factor fuera del determinante y el resto me quedaría con dos columnas o filas iguales siendo cero.
7. Un determinante se puede descomponer en suma de dos, descomponiendo una de sus columnas:[2]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & 4 \\ 2 & 2+x & 3 \\ 3 & 5+x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 \end{vmatrix}$$

Es decir,

$$\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{A'}_2, \vec{A}_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) + \det(\vec{A}_1, \vec{A'}_2, \vec{A}_3)$$

8. Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras (paralelas) el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A la primera columna le hemos sumado la segunda por k.

---

[1] Por esto se dice que es alternada, como función.

[2] Una función vectorial se dice lineal si

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \text{ y } f(r\cdot\vec{a}) = r\cdot f(\vec{a})$$

El determinante es lineal por filas o columnas. Es decir, multilineal.

Esta propiedad se puede deducir de las anteriores.

9. Si tiene una línea que es c.l. de las demás paralelas su determinante es cero y viceversa.

6. DEFINICIÓN POR ADJUNTOS. AMPLIACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO

Si en la expresión desarrollada anterior, destaco los elementos de una fila o columna, cada uno de ellos estará multiplicado por las posibles elecciones de los restantes elementos que hay fuera de su fila y columna. Y así me aparece cómo el determinante de orden 3 se puede definir a partir del de orden 2:

$$|\ A\ | = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \quad (por \;\; la \;\; fila \;\; 1)$$

Se puede ver en el desarrollo de Sarrus y, también, con el determinante se puede visualizar también el juego de menores.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \square & \square \\ & \square & \square \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ \square & & \square \\ \square & & \square \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} & & a_{13} \\ \square & \square & \\ \square & \square & \end{pmatrix}\end{array}$$

Menor asociado a a_{ij}

Se llama menor complementario de a_{ij} al determinante de la submatriz S_{ij}. Se representa por $M_{ij} = \det(S_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{21} = |\ S_{21}\ | = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = |\ S_{12}\ | = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{33} = |\ S_{33}\ | = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} =$$

El juego de signos viene dado por la siguiente ley:

Adjunto asociado a a_{ij}

El adjunto es el menor afectado por el signo que viene dado por $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Signo asociado a los elementos de una matriz

Signo asociado a $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Esto sobre la matriz es algo muy sencillo de asociar. Aquí lo mostramos en tres casos diferentes.

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

En el ejemplo anterior,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = -M_{21} =$$

$$A_{12} = -M_{12} =$$

$$A_{33} = +M_{33} =$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ POR ADJUNTOS. PROPIEDAD

El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Eligiendo, por ejemplo, una fila, nos sirven sus elementos para clasificar todos los sumandos del determinante.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|\ A\ | = \det A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \quad (\textit{por la fila } 2)$$

$$|\ A\ | = \det A = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} \quad (\textit{por la columna } 3)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}; \quad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

REDUCCIÓN DEL DETERMINANTE

Utilizar las propiedades del determinante para hacer ceros, sacar factores…

Ejemplo.- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

PROPIEDADES NUEVAS

1. La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela es 0.

$$Sea\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

En este caso hemos multiplicado los elementos de la primera fila por los adjuntos de la segunda. Sería equivalente a hacer un determinante con dos filas iguales.

• Comprobémoslo con un ejemplo,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

De esta propiedad se deduce que $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right|=$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=$$

3. El determinante de una matriz triangular o diagonal coincide con el producto de todos los elementos de la diagonal.

La demostración es trivial.

7. RANGO DE UNA MATRIZ

ESPACIO VECTORIAL

Conjunto de n-uplas con dos operaciones: suma y producto por escalares con las propiedades:

(V, +)
Asociativa
Conmutativa
Vector nulo
Vector opuesto
(V,·)
Asociativa
Distributiva 1
Distributiva 2
Elemento neutro

Dados varios vectores v1, v2, v3,…,vn se llama c.l. de ellos a cualquier vector v = r1·v1 + r2·v2 + … rn·vn siendo ri de R.

Varios vectores se dicen l.i. si ninguno es c.l. del resto.

Si un vector es distinto del vector nulo ya tengo un vector l.i. –recta–. Si tengo dos vectores no nulos y uno no es c.l. del otro ya tengo dos –plano–. Si tengo tres y el tercero no es c.l. de los anteriores ya tengo tres –espacio–. Y así sucesivamente. Este es el método de analizar la dependencia lineal más sencillo.

Se dicen l.d. en caso contrario.

En cualquier grupo de vectores en que entra el vector nulo **0** lo hace l.d.

Por ejemplo, los sistemas de ecuaciones tienen esta estructura.

Ejemplos

¿Cómo son, entre ellos, las ternas: (1, 2, 4); (0, 2, –5) y (0, 0, 6)?

$(1, 2, 4) \neq x \cdot (0, 2, -5) + y \cdot (0, 0, 6)$

Rango de una matriz

Rango de una matriz A es el mayor nº de vectores l.i. que contiene. Se demuestra que es igual por filas que por columnas.

Ejemplos

Hallar el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

DEPENDENCIA LINEAL Y DETERMINANTE

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ los vectores son l.d.

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ los vectores son l.i.

Ejemplo.–

¿Cómo son los vectores (2, 3, 1); (1, 0, 1) y (0, 1, 3)?

RANGO DE UNA MATRIZ

Si a vectores l.d. se les quitan coordenadas siguen siendo l.d.

Basta poner la c.l. correspondiente para verlo. Quitando coordenadas se mantiene la c.l.

Si a vectores l.i. se les añaden coordenadas siguen siendo l.i.

Basta poner la imposibilidad de una de ellas para comprender las demás.

Menos aún si añadimos coordenadas.

Menor de orden 2

Se llama menor de orden 2 de una matriz a cualquiera de los determinantes que resultan de elegir 2 filas y 2 columnas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Esto me dice que los dos últimos vectores columnas tienen dos componentes l.i. y por lo tanto esos vectores lo son.

Si lo mirásemos por filas me lo diría de los vectores 2º y 3º.

Propiedad

El rango de una matriz; es decir, el mayor nº de vectores linealmente independientes que contiene coincide con el orden mayor de menores diferentes de cero que contenga.

El procedimiento para hallar este orden máximo es partir de algún menor diferente de cero e ir añadiéndole filas y columnas de forma inteligente.

Si la matriz es numérica empezaremos de menores de orden inferior a mayor. Si contuviese algún parámetro procederíamos al revés.

Ejemplos

Veamos un ejemplo,

Supongamos que queremos saber cuántos vectores l.i. contiene la siguiente matriz y cuáles son ellos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

8. CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Se puede introducir multiplicando una matriz cuadrada A de orden 3 por su adjunta y ver lo que queda de acuerdo con las propiedades anteriores. De ahí se deduce fácilmente la inversa.

Adjunta de una matriz

Se llama matriz adjunta de A y se representa Adj (A) = (A_{ij}).

Es decir, a la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de la matriz A.

• Hallar la adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Inversa de una matriz

Se define como matriz inversa de A –cuadrada– a la matriz que representamos por A^{-1} y que cumple lo siguiente:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Es decir, que el producto por ella me da la identidad. Este producto resulta siempre conmutativo.

Fórmula de la inversa

Se demuestra que la matriz inversa de A coincide con el siguiente valor:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$$

Regla práctica según el libro

$$(a_{ij}) \to (M_{ij}) \to (A_{ij}) \to (A_{ij})^t \to A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t$$

ejemplo:

Hacerlo para $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Vamos a calcular la inversa de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. COMPLEMENTO TEÓRICO

JUSTIFICACIÓN DEL VALOR DEL DETERMINANTE

Si tuviésemos tres vectores de tres coordenadas formarán una matriz de orden 3.

¿Cuál sería la condición para que fuesen l.d.?

$$x\cdot(a_{11},a_{12},a_{13})+y(a_{21},a_{22},a_{23})=(a_{31},a_{32},a_{33})$$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{21}y=a_{31} \\ a_{12}x+a_{22}y=a_{32} \\ a_{13}x+a_{23}y=a_{33} \end{cases}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones, por ejemplo, y sustituyendo en la tercera obtenemos una expresión muy parecida a la anterior, pero con productos de elementos elegidos de cada fila y columna y con un juego de signos similar.

Lo mismo nos ocurre si nos planteamos resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por reducción, eliminando dos de las incógnitas.

$$\begin{array}{l} \alpha\cdot \\ \beta\cdot \\ \gamma\cdot \end{array}\begin{cases} a_{11}x+a_{21}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

PERMUTACIONES

Llamamos inversiones de una permutación al número de cambios que presentan sus elementos con respecto a la ordenación natural.

Si la permutación es par el signo es positivo y si es impar es negativo; es decir, depende de la 'paridad' de la permutación.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Permutación}\ \begin{array}{c}\textit{filas}\\ \textit{columnas}\end{array} & \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \\ \textit{Producto} & a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} & a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdots \\ \textit{Signo} & + & - \end{array}$$

También admitiría una visualización de este tipo las posibles elecciones:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}x&&\\&x&\\&&x\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}x&&\\&&x\\&x&\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}&x&\\x&&\\&&x\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}&x&\\&&x\\x&&\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}&&x\\x&&\\&x&\end{pmatrix}\end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}&&x\\&x&\\x&&\end{pmatrix}\end{array}$$

Si en vez de fijar la columna, fijamos la fila el signo será el mismo. Pues la paridad de las filas respecto de las columnas será igual que de las columnas respecto de las filas para cada permutación individualmente considerada.

El juego de las posibles permutaciones también se da en el determinante ya estudiado de orden dos.

Es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Manteniendo el número de la columna fijo, tenemos dos posibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ADJUNTOS

Para ser más rigurosos podríamos razonar así: Si en el desarrollo de un determinante sacamos factor común a_{ij} en todos los términos que figura, aparece multiplicado por un polinomio que se llama adjunto de a_{ij} y que se representa por A_{ij}

Si en un determinante nos fijamos en los términos en que aparece a_{11}, separado este elemento, el resto forman parte de M_{11}, puesto que el signo no va a depender de a_{11} ya que no presenta ninguna inversión respecto del resto.

Y viceversa, todo término de M_{11} multiplicado por a_{11} nos da un término del determinante.

Por lo tanto, $A_{11}=M_{11}$

Si ahora cogemos un término cualquiera a_{ij} y lo llevamos a la primera posición, presentará (i - 1)+(j - 1) inversiones, trasladando progresivamente la fila y la columna hasta llegar a esa posición.

Tendremos que $|A|= (- 1)^{i+j} \cdot |A'|$.

Pero en este nuevo determinante el adjunto de a_{ij} será el menor M_{ij} que no ha sufrido variación. Es decir, $|A'|=a_{ij}\cdot M_{ij} + \ldots$ El orden relativo de filas y columnas no ha cambiado, tan sólo la posición de a_{ij} dentro de los productos que ya está corregida más arriba.

Por tanto, como los sumandos son iguales, afectados del cambio de signo tendremos que

$a_{ij}\cdot A_{ij} = (- 1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$

ESPACIO VECTORIAL

Los vectores, con sus propiedades operativas han dado lugar a una estructura algebraica que se llama ***espacio vectorial***.

Un conjunto V, a cuyos elementos llamaremos vectores, se dice que tiene una estructura de ***espacio*** vectorial si tiene definidas dos operaciones: suma interna, producto externo por escalares (V, +, ·) con las siguientes propiedades:

(V, +)

Asociativa

Conmutativa

Vector nulo

Vector opuesto

(V,·)

Asociativa

Distributiva 1

Distributiva 2

Elemento neutro

El conjunto de las n-uplas de números reales forman un espacio vectorial, con las operaciones siguientes (ya sabemos)

Pares, ternas, cuaternas,…

Las matrices de orden nxm.

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Geométricamente un vector define una dirección en el espacio.

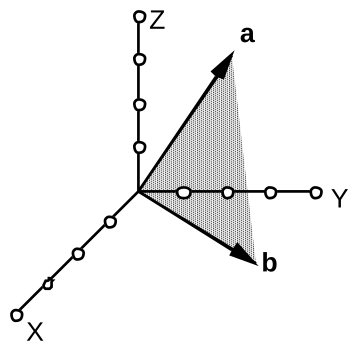
Dados n vectores y n escalares se llama c.l. de dichos vectores al vector v que resulta de:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \vec{v}_i$$

Ejemplos.

Las c.l. de un vector en el plano o en el espacio me da una recta.

Las c.l. de dos vectores en el espacio me dan un plano.



DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Un conjunto de vectores se dice que es l.d. si algún vector es c.l. del resto.

Se dice l.i. si ningún vector es c.l. del resto.

Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es l.d.

DEPENDENCIA LINEAL Y DETERMINANTE

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ los vectores son l.d.

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ los vectores son l.i.

Demostración

Vectores l.i. $\Rightarrow |A| \neq 0$

Encuentro alguna primera coordenada $\neq 0$. De lo contrario sería un conjunto l.d.

Con este elemento anulo a toda la primera columna.

Dejando el primer vector fila paso a partir de la segunda y busco una segunda coordenada $\neq 0$. De lo contrario bla, bla,…

Así sucesivamente hasta que llego a una matriz triangular con toda la diagonal diferente de cero.

Determinantes

1 Determinar el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

2 Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

3 Determinar el valor o valores de a en cada uno de los siguientes casos:

$$a)\begin{vmatrix} a & -7 & 4 \\ -1 & a & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad b)\begin{vmatrix} a+1 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & a-2 \end{vmatrix} = 6 \quad c)\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & a+3 & 1 \\ -1 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = 30$$

4 Calcula el valor

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

5 Determinar todos los números reales x para los que es positivo el determinante

PAU01

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

6 Resolver la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ x & 3 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$